Runde stege og kalkuner

I sin bog »The Science of Cooking« (Springer 2001) har Peter Barham[1] nogle betragtninger om stegning:

»For the mathematically minded I have written out the solution for the heat transfer equation for the case of a spherical object immersed in a heat bath kept at a constant temperature. For the sake of simplicity we approximate all food to be spherical! – it really doesn't the affect conclusions which are all that matters.

It can be shown that in a sphere of radius a the temperature inside the sphere $\Delta T(t,r)$ is given by

$$\Delta T(t,r) = \frac{2ka\Delta T_0}{3r} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa\alpha_n t} \frac{k^2a^4\alpha_n^4 + 3(2k+3)a^2\alpha_n^2 + 9}{k^2a^4\alpha_n^4 + 9(k+1)a^2\alpha_n^2} \sin r\alpha_n \sin r\alpha_n$$

where $T(t,r)$ is the temperature inside the sphere as a function of time, t, and radius r; expressed as the difference between the temperature of the heat bath, and the local temperature. ΔT_0 is initial temperature difference between the sphere and the fluid in the heat bath; κ is the thermal diffusivity of the sphere and <u>k is the ratio of the specific heats of the sphere and the fluid in the heat bath. (??),</u> and $\pm\alpha_n$, n =1,2,3. are the roots of

$$\tan\alpha = \frac{3a\alpha}{3 + ka^2\alpha^2}$$ «

Der er en ting ved denne løsning som jeg slet ikke forstår, og det er konstanten k, der som det står i citatet er forholdet mellem C_p for kuglen og for mediet. Lidt før løsningen ovenfor finder vi Barhams version af varmediffusionsligningen (side 43), og den er helt normal (for et endimensionalt tilfælde):

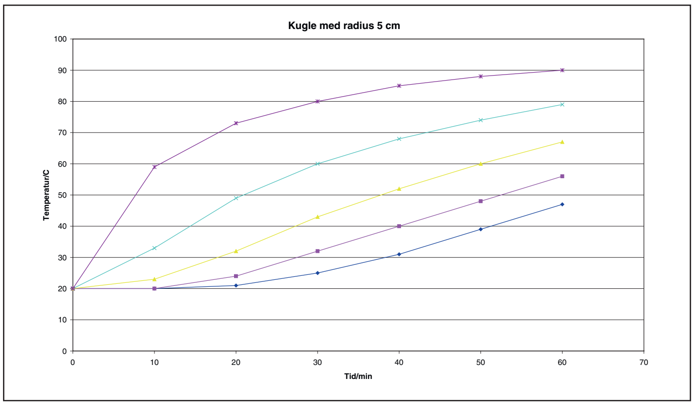
$$\frac{dT}{dt} = \kappa \frac{d^2T}{dx^2}$$

Intet spor af konstanten k. Kan k komme ind via randbetingelserne? En forespørgsel hos Barham via e-mail har ikke løst problemet.

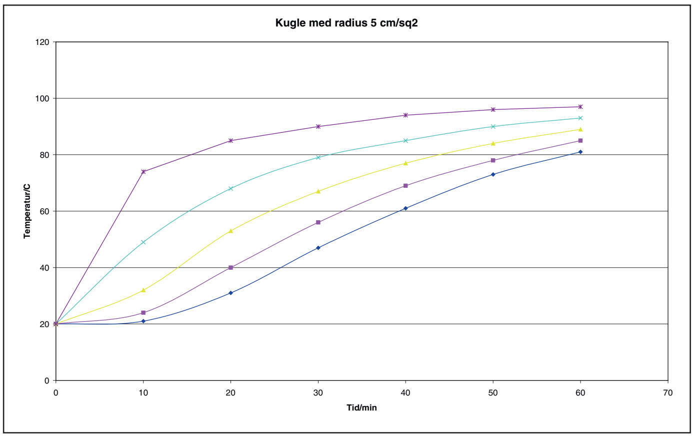
I forbindelse med udledningen af varmediffusionsligningen har Barham denne interessante betragtning (understreget):

»Now although the thermal diffusion equation has many solutions, in all of them a term of the form x^2/t appears. For example one solution is:

$$T(x,t) = (4\kappa t)^{-½} \exp(-x^2/4\kappa t)$$



Figur 1. Temperaturer i de fem skaller i en kugle med radius 5 cm inddelt i ækvidistante kugleskaller. Kernetemperaturen er den nederste kurve.



Figur 2. Som i figur 1, blot er radius 5 cm/•2. Sammenligner man de tider, der medgår til at bringe kernetemperaturen op på 40°C og 45°C, så finder man, at den er præcis dobbelt så lang i den store kugle, som i den lille, sådan som man skulle vente efter Barhams lov.

<u>Thus the cooking time is always proportional to the square of the size of the food, rather than its weight «.</u>

Modellering af kuglerunde stege

Jeg må beskæmmet indrømme, at jeg ikke ser argumentet klart for mig, men jeg har gjort et par modelleringsforsøg med en kugleformet steg i kogende vand. Her er kun den radiale del af ∇^2 relevant, den ser således ud:

$$\frac{dT(r,t)}{dt} = \frac{\kappa}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}$$

Sammenligner man med udtrykket for den uendelige cylinder, så fremgår det at 1/r i cylindertilfældet er blevet erstattet af $1/r^2$ i det kugleformede tilfælde. Det er derfor meget enkelt at lave regnearket om, så det gælder for kuglen i stedet. Så enkelt at jeg både har regnet for en kugle med radius 5 cm og en hvis radius er 5/•2 cm – i forventning om, at det nu ville gå dobbelt så hurtigt. Figur 1 og 2 viser resultaterne. Og det passer, det passer endda lige på en prik. Så nu tror jeg på det, selvom jeg ikke forstår det.

En lidt forsinket opskrift på kalkun

Stegetiden for kalkuner afhænger af deres størrelse, se figur 3 (side 32), og af deres termiske diffusivitet κ, der har dimension af areal/tid. ($[\kappa] = L^2T^{-1}$)

1. Hvad kan dimensionsanalysen sige om stegetidens afhængighed af kalkunens størrelse?
2. Når en kalkun på 3 kg kræver en stegetid på 2½ time, hvor længe skal en kalkun på 6 kg da stege?

Løsning:

1: Vi antager, at stegetiden t er en funktion af volumen V og diffusivitet κ. Potenser α og β kan kun vælges på én måde, så dimensionen

$$\left[V^\alpha \kappa^\beta\right] = (L^3)^\alpha (L^2T^{-1})^\beta = L^{3\alpha+2\beta}T^{-\beta}$$

bliver lig $[t] = T^1$ (a)

($=L^0T^{-1}$). De to ligninger

Figur 3. Kalkunen gøres klar.

$$3\alpha + 2\beta=0 \quad \text{og} \quad -\beta-1=0 \qquad \text{(b)}$$

har jo kun den ene løsning: α=2/3 og β=–1. Altså må vi have

$$\frac{t}{V^{2/3}\kappa^{-1}}=C \quad \text{(en dimensionsløs konstant)} \qquad \text{c)}$$

Dermed kan stegetiden t skrives som funktion af V og κ

$$t=\frac{C}{\kappa}V^{2/3}=\frac{C}{\kappa}\left(\frac{m}{\rho}\right)^{2/3} \qquad \text{(d)}$$

hvor kalkunens masse m og densitet ρ er indført.

2: For en kalkun med masse på 3 kg og stegetid 2½ time giver indsættelse i ligning (d)

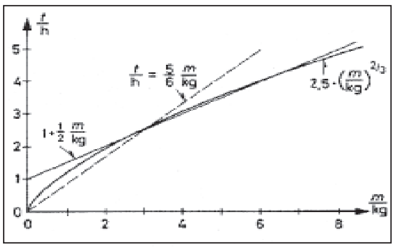
$$2{,}5\,\mathrm{h}=\frac{C}{\kappa}\left(\frac{3\,\mathrm{kg}}{\rho}\right)^{2/3} \qquad \text{(e)}$$

Divideres dette op i ligning (d), forsvinder konstanterne C, κ og ρ ,

$$\frac{t}{2{,}5\,\mathrm{h}}=\left(\frac{m}{3\,\mathrm{kg}}\right)^{2/3} \qquad \text{(f)}$$

Hermed er bestemt den generelle sammenhæng mellem kalkuners masse og stegetid. For en kalkun med massen m=6kg fås således

$$t_6=2{,}5\,\mathrm{h}\cdot\left(\frac{6\,\mathrm{kg}}{3\,\mathrm{kg}}\right)^{2/3}=3{,}97\,\mathrm{h} \qquad \text{(g)}$$



Figur 4. Stegetid vs. masse for kalkunstegning.

Ligning (f) er afbildet på figuren som den krumme kurve. Mange kogebøgers angivelser på formen »50 minutter pr. kg« svarer til den punkterede kurve på figuren og gælder kun i et snævert interval for m. Betydeligt bedre er angivelser på formen »½ time pr. kg plus 1 time« som vist med den tyndt optrukne kurve.

Alle tidsangivelser gælder ved samme stegetemperatur som for den oprindelige kalkun.

Eksemplet er taget fra

B. Howald Jensen: Hydraulik. 3. udgave s. 149, Danmarks Ingeniørakademi. Bygningsafdelingen 1990

Jeg – Flemming Jørgensen, (fysiklærer på Næstved Gymnasium) – har modificeret de første linjer i løsningen, fordi der i noterne gøres brug af en speciel forud defineret terminologi.

Man kan måske undre sig over, hvad kalkunstegning har at gøre i et sæt noter om hydraulik og strømningslære. Sagen er, at der i sidstnævnte fagområder gøres udstrakt brug af dimensionsanalyse. Kalkunstegningen er blot med som et morsomt eksempel på en anvendelse af denne specielle analyseform.

Nu kunne det jo være interessant at se, om dimensionsanalysen vil føre til den samme r^2 -afhængighed for kuglen, som vi har fundet oven for. Vi går ind i hans formel (c) og udleder følgende:

$$\frac{t}{t_0}=\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3}=\left(\frac{r^3}{r_0^3}\right)^{2/3}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^2=\left(\frac{r_0/\sqrt{2}}{r_0}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Og verificerer dermed r^2 -afhængigheden. Så nu må resultatet vist anses for nagelfast.

Jeg kan tilføje, at Flemming Jørgensen har udledt et resultat, der er identisk med det, vi fik for kalkunen, men med udgangspunkt i selve varmeledningsligningen. Vha. skaleringsbetragtninger når han frem til identiske resultater. Interesserede er velkomne til at henvende sig til mig, hvis de vil have udledningen tilsendt.

Den generelle lovmæssighed

Ad snørklede veje er vi nået frem til den generelle lovmæssighed, at stegetiden er proportional med stegens rumfang opløftet til potensen 2/3. Lovmæssigheden omfatter imidlertid Barhams, hvis hans *tværsnit* fortolkes som rumfanget opløftet til 2/3 – for hvad er en kalkuns tværsnit?

$$\frac{t}{t_0}=\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3}\equiv\frac{\langle r^2\rangle}{\langle r_0^2\rangle};\quad \langle r^2\rangle\equiv V^{2/3}$$

I den første artikel, foranlediget af Gregersens spørgsmål, var det stegens vægt, der var udgangspunktet. Og den kom jo også ind i kalkunstykket ovenfor. Faktisk kan lovmæssigheden også udtrykkes ved massen via massefylden:

$$\frac{t}{t_0}=\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3}=\left(\frac{m}{m_0}\right)^{2/3}$$

I såvel kugleberegningerne som de netop omtalte lovmæssigheder har vi stiltiende forudsat, at vi holdt temperaturen på 100°C, men dette er ret uinteressant, undtagen hvis man vil koge en kuglerund skinke, hvad der faktisk overgik mig før jul. Ved en stegning ved 180°C vil der være et safttab, som omtalt i den første artikel. Dersom safttabet er proportionalt med stegens masse – vel ikke nogen urealistisk antagelse – så holder den sidste version af lovmæssigheden stadig.

I den næste artikel, som kommer i marts, har jeg formået Thure Ralfs fra Comsol (se KIK 85;11 2004 hvor han tog kogning af æg under kærlig behandling) til at modellere stegningen af Gregersens udskæring. Heri indgår beregningen af safttabet eksplicit.

1) Peter Barham er reader i fysik på University of Bristol, UK. Han er en af eksponenterne for Molecular Gastronomy og har samarbejdet med Heston Blumenthal fra »The Fat Duck«, trestjernet restaurant i Bray, UK.